BLOC 3.- EXPRESSIONS, EQUACIONS I FUNCIONS

EXPRESSIONS ALGEBRAIQUES

A una expressió algebraica trobem números, lletres i signes aritmètics. Les lletres substitueixen els valors de números que no sabem i es denominen incògnites.

Les utilitzem normalment al llenguatge habitual:

El doble d'un número	La quarta part d'un número	La meitat del quadrat d'un número	El triple d'un número, més quatre
$\mathbf{2x}$	$\mathbf{\frac{x}{4}}$	$\mathbf{\frac{x^2}{2}}$	$\mathbf{3x+4}$

Als valors numèrics se'ls denomina **coeficients**, i a les lletres **part literal**.

A les expressions:

3x **3** és el coeficient i **x** la part literal

$-5x^2y$ **-5** és el coeficient i **x^2y** la part literal

$5x^2 - x$ els coeficients són **5** i **-1** i les parts literals **x^2** i **x**

Valor numèric d'una expressió algebraica

És el que obtenim quan substituïm les lletres per números

Quin és el valor numèric de **$3x^2 + x$** per a **x = 2** ? **$3 \cdot 2^2 + 2 = 12 + 2 = 14$**

MONOMIS I POLINOMIS

Un **monomi** és una expressió algebraica on números i lletres sols estan afectats per productes, i les lletres sols per exponents positius.

$-5x^2y$ és un monomi, $-\frac{2}{3}xy$ també, però **$-5x^{-2}y$** no ho és, ni tampoc $-5\frac{x}{y}$

El grau d'un monomi és la suma dels exponents de la part literal. Així:

$-5x^2y^3$ té com a coeficient **-5** i com a grau **5 (2 + 3)**
$-\frac{2}{3}xy$ té com a coeficient **-2/3** i com a grau **2 (1 + 1)**

Un **polinomi** és una expressió algebraica formada per la suma i/o la resta de dos o més monomis.
El grau d'un polinomi és el grau major dels termes que conté.
El terme independent és el que no du part literal.

$P(x) = -5x^2 + x + 3$ és de grau 2 i el terme independent és 3
$P(x) = 3x^4 + x^2 + x$ és de grau 4 i no té terme independent

EQUACIONS

Una **equació** és una igualtat entre dues expressions algebraiques, on representem valors coneguts (dades) i valors desconeguts (incògnites) relacionats per operacions matemàtiques. Un número (o números) és la solució d'una equació quan al substituir-lo en la incògnita s'igualen els termes de l'equació. És a dir, si substituïm un número en les incògnites i s'acompleix la igualtat, eixe número és la solució.

D'ací 10 anys tindré el triple de l'edat que tenia fa 10 anys.

$\mathbf{x + 10 = 3\,(x - 10)}$
Si substituïm x per 20 $\mathbf{20 + 10 = 3\,(20 - 10)}$ $\mathbf{30 = 3 \cdot 10 = 30}$ Per tant, **20** és la solució.

El primer pas per al plantejament és llegir atentament l'enunciat. Després decidim quines són les incògnites. És convenient expressar-les a una banda del paper. Finalment relacionem incògnites, números i signes. P.ex.:

Un número més el seu quadrat $\mathbf{x + x^2}$
El triple de la meua edat d'ací 5 anys $\mathbf{3\,(x + 5)}$
Un quart d'un número menys la meitat d'un altre $\mathbf{\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y}$
El doble de la suma de la teua edat i la meua $\mathbf{2\,(x + y)}$
El doble de la suma de la teua edat més el triple de la meua $\mathbf{2\,(x + 3y)}$

I en forma d'equació (cal obtenir el resultat):

El triple de la meua edat d'ací 5 anys és 75 anys. Quina edat tinc?

x = edat actual

$\mathbf{3\,(x + 5) = 75}$ $\mathbf{3x + 15 = 75}$ $\mathbf{3x = 75 - 15}$ $\mathbf{3x = 60}$ $\mathbf{x = 60/3}$ $\mathbf{x = 20}$

D'ací 10 anys tindré el triple de l'edat que tenia fa 10 anys. Quina edat tinc?

x = edat actual

$\mathbf{x + 10 = 3\,(x - 10)}$ $\mathbf{x + 10 = 3x - 30}$ $\mathbf{x - 3x = -30 - 10}$ $\mathbf{-2x = -40}$ $\mathbf{x = -40/-2 = 20}$

EQUACIONS DE PRIMER GRAU

A una equació de primer grau la incògnita no està elevada a cap potència, és a dir, està elevada a 1 i este no es posa. Per exemple: "si al doble d'un número li restem 4 dóna com a resultat 0.

$\mathbf{2x - 4 = 0}$

Per a resoldre-la aïllem la incògnita: $\mathbf{2x = 4}$ $\mathbf{x = 4/2 = 2}$

La incògnita és una lletra que representa un valor, i no és precís que es diga sempre **x**.

Dues equacions són equivalents si tenen la mateixa solució.

$\mathbf{2x - 6 = 2}$ $\mathbf{x = 4}$ és equivalent a $\mathbf{x - 3 = 1}$ $\mathbf{x = 4}$

Si substituïm el resultat en l'equació original $\mathbf{(2 \cdot 2) - 4 = 0}$ s'acompleix la igualtat.

Si l'expressió té molts termes cal agrupar-los abans de resoldre

$\mathbf{2x - 10 + 4x + 2 = x - 6 + 3x}$ $\mathbf{2x + 4x - x - 3x = -6 + 10 - 2}$ $\mathbf{2x = 2}$ $\mathbf{x = 2/2 = 1}$

Si fem la mateixa operació als dos costats de la igualtat, aquesta no canvia. P.ex.:

- Si sumem o restem el mateix número als dos costats
- Si dividim o multipliquem els dos costats pel mateix número

Recordem que, per a aïllar, els termes d'una equació passen d'un costat a l'altre amb l'operació contrària:

- **Si estan sumant passen restant**
- **Si estan restant passen sumant**
- **Si estan multiplicant passen dividint**
- **Si estan dividint passen multiplicant**

EQUACIONS DE SEGON GRAU

Una equació de segon grau respon a la forma $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$, on un dels termes té **x** elevada al quadrat.

Per exemple: $\mathbf{3x^2 + 2x + 4 = 0}$

Poden ser completes, quan presenten tots els termes, o incompletes, si els falta algun que no siga el de x^2

Una equació de segon grau pot tenir fins a dos solucions. Per a resoldre-la cal emprar la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

on **a** és el número davant de x^2, **b** el número davant de x i **c** el terme independent (sense x).

Si la equació no és completa no cal utilitzar la fórmula.

SISTEMES D'EQUACIONS AMB DUES INCÒGNITES

En general, una incògnita es pot resoldre amb una sola equació. Si tinc dues incògnites necessitaré de dues equacions. I si en tinc tres, necessitaré tres.

Una equació de primer grau amb dues incògnites és una expressió del tipus a**x**+b**y**=c on **x** i **y** són les incògnites i a, b i c són números coneguts.

Un sistema d'equacions consta de dues equacions en les quals una mateixa incógnita representa el mateix valor a les dues. És a dir, si a la de dalt x té un valor, este és el mateix per a la de baix.

$$\begin{aligned} ax+by&=c \\ dx+ey&=f \end{aligned}$$

Una solució de un sistema és un parell de números que verifiquen les dues equacions al mateix temps.

Mètodes de resolució de sistemes d'equacions

Mètode de substitució

S'aïlla una de les dues incògnites a una de les equacions. Se substitueix l'expressió obtinguda a l'altra equació i es resol l'equació resultant. Després se substitueix el valor de la incògnita obtinguda a qualsevol de les dues equacions i s'obté el valor de l'altra incògnita.

Exemple: **x+3y=17**
2x-4y=-16

1. Busque el valor, per exemple, de la x, a la primera equació: x=17-3y
2. Substituïsc en la x de la segona equació: 2(17-3y)-4y=-16
3. Com es veu, m'he quedat amb una sola incògnita. La resolc:

   34-6y-4y=-16 34-10y=-16 -10y=-50 $y = \frac{-50}{-10} = 5$

4. Substituïsc eixe valor a qualsevol de les dues equacions originals i resolc la segona incògnita:

   x+3·5=17 x+15=17 x=17-15=2

Mètode d'igualació

S'aïlla la mateixa incògnita a les dues equacions. Com la incògnita és la mateixa per a les dues, el seu valor també és igual. Per tant igualem les dues expressions. Aïllem la incògnita que ens queda. Després substituïm el seu valor a qualsevol de les dues equacions originals i obtenim l'altra incògnita.

Exemple: **x+3y=17**
2x-4y=-16

1. S'aïlla la mateixa incògnita a les dues equacions: x=17-3y $x = \frac{-16+4y}{2}$
2. Igualem les dues expressions i aïllem la incògnita:

   $17-3y = \frac{-16+4y}{2}$ 34-6y=-16+4y -10y=-50 $y = \frac{-50}{-10} = 5$

3. Substituïm el seu valor a qualsevol de les dues equacions originals i obtenim l'altra incògnita:

   x+3·5=17 x+15=17 x=17-15=2

Mètode de reducció

Si cal, s'igualen els coeficients d'una de les incògnites per a que queden amb signes contraris (si multiplique els dos costats d'una equació pel mateix número la igualtat es manté). Les sume i desapareix la incògnita igualada. De l'equació resultant trac el valor de la incògnita que queda. Després, substituint el valor a qualsevol de les equacions originals calcule el de l'altra.

x+3y=17
2x-4y=-16

S'igualen els coeficients d'una de les incògnites per a que queden amb signes contraris

Multiplicant la de dalt per -2

-2x-6y=-34
2x-4y=-16

Sumem

-2x-6y=-34
<u>2x-4y=-16</u>
-10y=-50

Desapareix, per tant, una de les incògnites. Trobem el valor de l'altra:

$$y = \frac{-50}{-10} = 5$$

Substituïm el seu valor a qualsevol de les equacions originals i calculem el valor de l'altra incògnita:

x+3·5=17 x+15=17 x=17-15=2

INTRODUCCIÓ A LES FUNCIONS

Magnitud

Magnitud és tot allò que es pot mesurar i expressar mitjançant una quantitat i una unitat. Per exemple, la massa, la longitud, el temps, el volum, etc.

Funció

Una funció és una relació entre dos magnituds. Una d'elles adopta el paper de *variable independent* (és a dir, pot prendre diferents valors) i l'altra de *variable dependent* (perquè depèn del valor de la primera).

Per exemple, si vull expressar que el sou de l'encarregat (y) serà 300 € superior al de l'empleat (x):

$$y = x + 300$$

Per tant, el sou de l'encarregat, la variable dependent (y), depèn del sou de l'empleat, la variable independent (x).

Esta relació es pot establir de diferents formes:

1. En llenguatge ordinari.
2. Mitjançant equacions o fórmules.
3. Mitjançant taules.
4. Mitjançant gràfiques.

LLENGUATGE ORDINARI

En llenguatge ordinari la relació s'expressa de la següent manera:

Com varia la magnitud A respecte a la magnitud B?.
O expressat d'altra manera: *Com depenen els valors que pren la magnitud A dels valors que pren la magnitud B?*

Exemple:

A una certa velocitat (per exemple, 10 km/h), com varia *la distància recorreguda* amb *el temps*?

Ací la distància tindria el paper de **variable dependent** i el temps de **variable independent**.

FÓRMULES

La relació entre l'espai recorregut segons els temps que passa ve definida per una fórmula:

$$\textbf{Espai} = \textbf{10} \cdot \textbf{Temps}$$

Aquesta fórmula va generant dades segons passa el temps. Per a ordenar-les generem una taula.

TAULES

Abans de poder representar la funció cal generar dades, en forma de parelles de punts (x,y), per a la qual cosa fem ús de taules:

t	e
Temps (Km.)	Espai (atm)
0	0
1	10
2	20
3	30
...	...

GRÀFIQUES

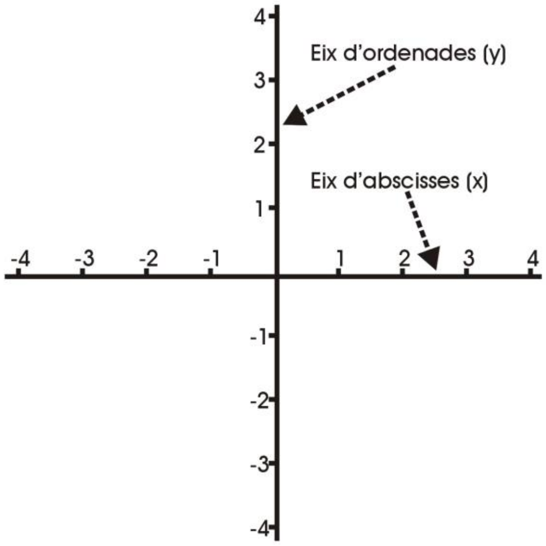
Quan la relació es dóna per gràfiques cal expressar-la mitjançant un sistema d'eixos de coordenades.

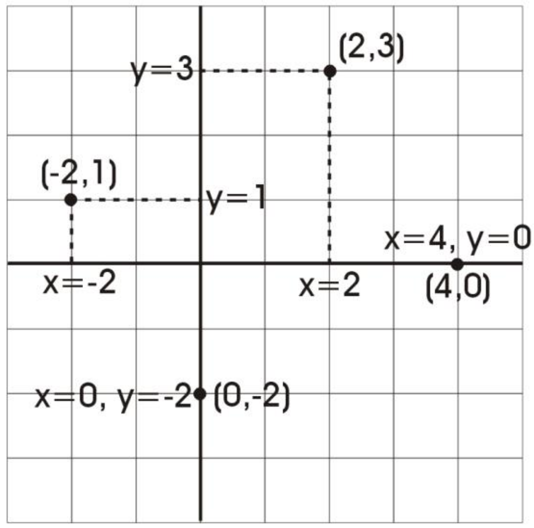
Les taules generen punts (**x,y**), que es representen a la taula de la forma següent:

- Els dos números composen un parell inclòs entre parèntesi i separats per una coma (x,y). El primer sempre és la x i el segon la y. Ambdós poden ser positius o negatius.

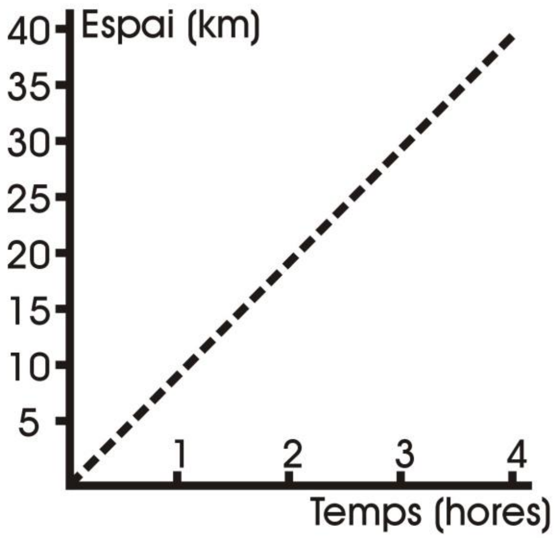
- Per a representar cada punt buscarem la posició x a l'eix de les x i la posició y a l'eix de les y. El punt de trobada dels dos és la posició del punt en qüestió.

- Si el punt té com a x o com a y el valor 0 estarà sobre un dels dos eixos.





Ara, al nostre exemple, al representar les parelles de punts a la gràfica generem una línia, que ens representa el moviment realitzat i la velocitat obtinguda:

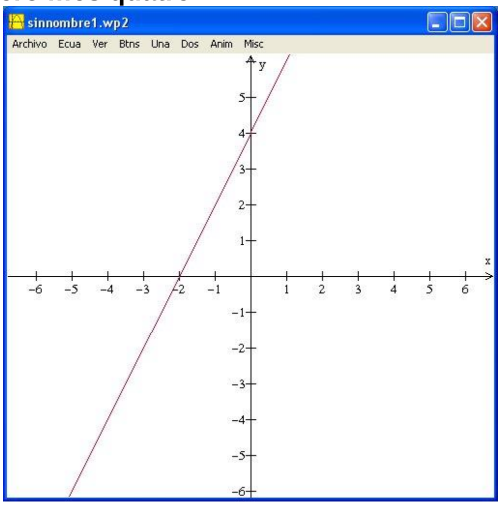


EXEMPLES

Una funció que associa a cada número el doble del número més quatre.

$$y = x+4$$

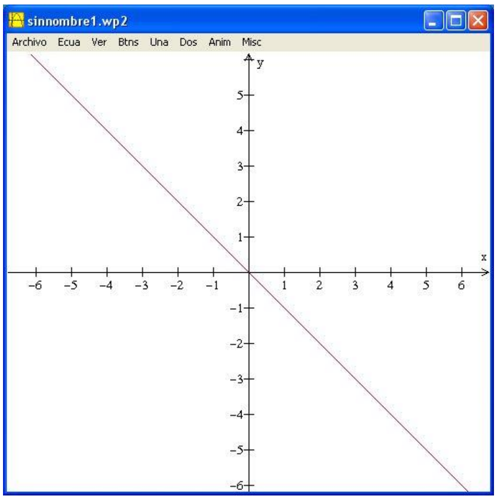
x	y
….	….
-4	-4
-3	-2
-2	0
-1	2
0	4
1	6
2	8
3	10
4	12
….	….



Una funció que associa a cada número el seu oposat.

$$y = -x$$

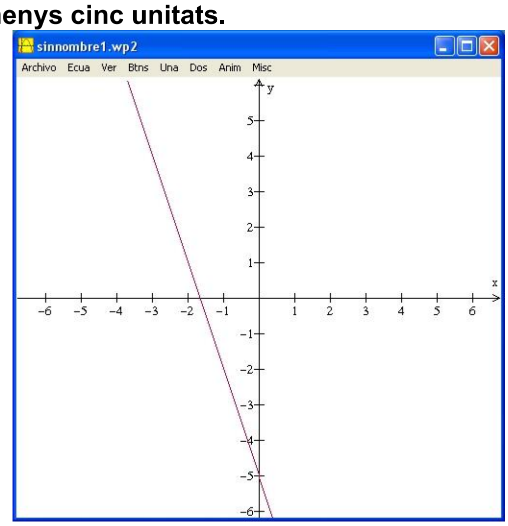
x	y
….	….
-4	4
-3	3
-2	2
-1	1
0	0
1	-1
2	-2
3	-3
4	-4
….	….



Una funció que associa l'oposat del triple del número menys cinc unitats.

$$y = -3x-5$$

x	y
….	….
-4	7
-3	4
-2	1
-1	-2
0	-5
1	-8
2	-11
3	-14
4	-17



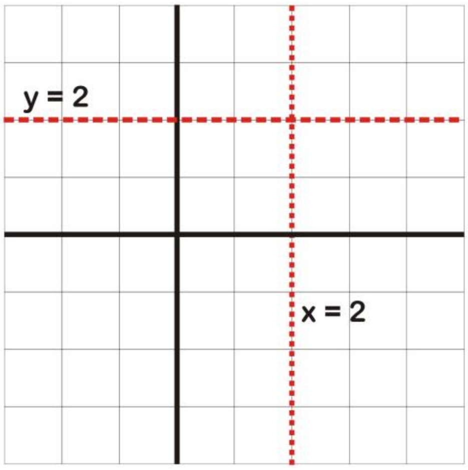
DIFERENTS TIPUS DE FUNCIONS

FUNCIONS CONSTANTS

Si la variable independent no existeix, la funció **y** és igual a un número, de manera que, per a qualsevol valor de **x**, **y** val el mateix.

Per exemple y= 2 serà una recta horitzontal.

Si és de la forma x= 2 serà una recta vertical.



FUNCIONS DE PRIMER GRAU

Son aquelles on la variable no està elevada (realment està elevada a 1), i els seus resultats generen una recta.

Imagina't que a una biblioteca, a més de cobrar-te 2 € per hora de connexió, et diuen que cal fer-te soci, i això val 3 €. Aleshores, la taula de l'import segons les hores de connexió resulta la següent:

Hores	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20
Euros	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	43

En aquest cas, l'increment de la variable E és constant. L'equació que permet passar d'hores a euros és **€ = 2·H + 3**. On € són els diners que et gastaràs, i H les hores que has estat connectat.

A la relació anterior se l'anomena **funció de primer grau**, s'escriu de la forma **y = 2x + 3** i **la seva gràfica és una recta**.

Com veus, la variable independent és la **x**, perquè la **y** (variable dependent) depèn de les hores que estigues connectat. I és de primer grau perquè la **x** no està elevada (ho està a 1).

POSICIÓ DE LES RECTES EN LA GRÀFICA

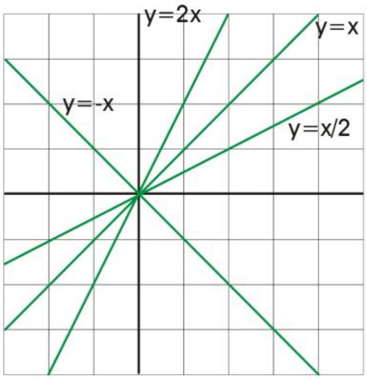
Si representem gràficament una funció de primer grau ens eixirà en forma de recta, la qual pot estar més o menys inclinada, cap a la dreta o cap a l'esquerra, i tallar a l'eix vertical en llocs diferents.

Una recta que parteix un quadrant per la meitat no du cap número davant la x (en realitat du l'1). Aquest número ens indica com d'inclinada està la funció, i es diu **pendent**.

PENDENT DE LA RECTA

Si el pendent és major que 1 la recta està més inclinada. Si és menor (fraccions amb valor menor que 1) ho està menys

Si el pendent és negatiu la recta està inclinada cap a l'altre costat.

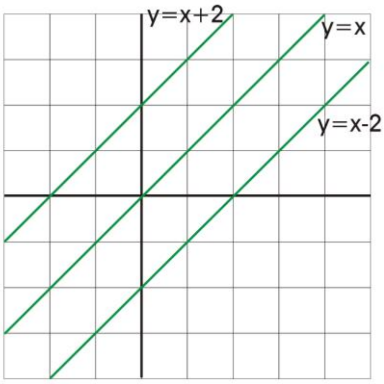


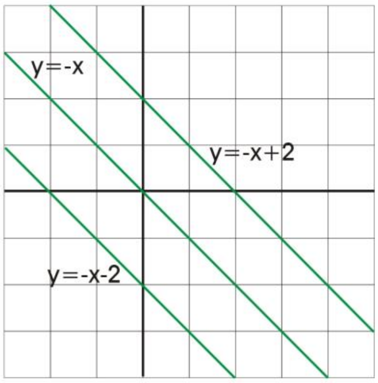
TERME INDEPENDENT

El número que va darrere, sense x, es diu terme independent i determina la posició de la recta en altura, independentment del pendent de la recta. La recta tallarà l'eix de les **y** pel punt assenyalat pel terme independent.

y = x+2 tallarà per y=2. **y = -x+2** també.

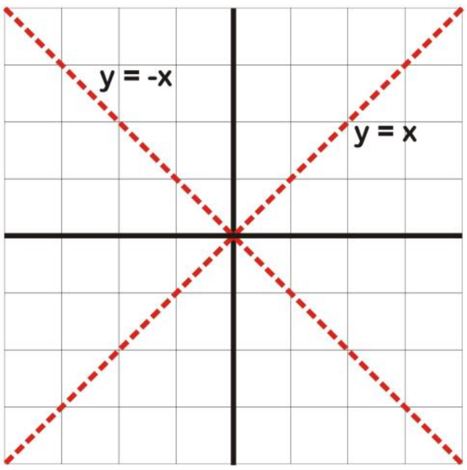
Una funció sense terme independent (del tipus y=x o y=2x) passarà pel centre de coordenades (punt (0,0)), perquè no tenen terme independent.

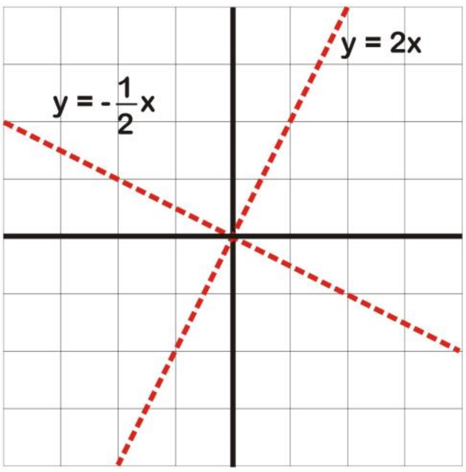




Com hauràs observat, si hi ha dues funcions on la x és igual i es diferencien sols en el terme independent (per exemple y=x+2 i y=x-2), es tracta de dues **rectes paral·leles**.

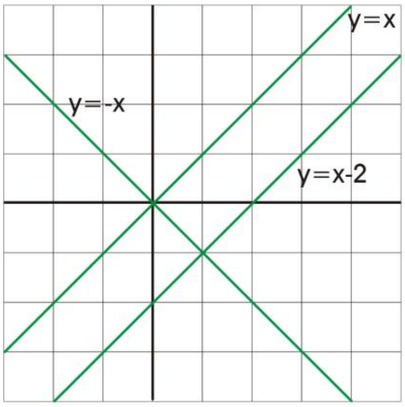
I com seran dues **rectes perpendiculars**? Si el número que va davant de la x és el pendent de la recta, dues rectes perpendiculars tindran el **pendent invers** i amb el **signe canviat**.





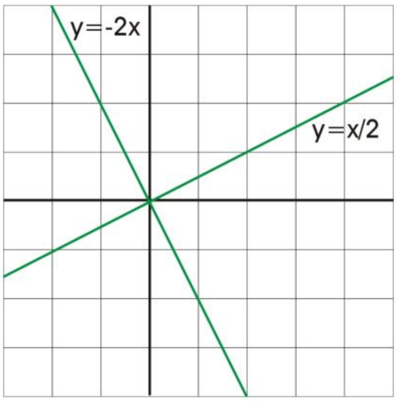
y=x és perpendicular a y=-x

y=-x també és perpendicular a y=-x+2



Si el coeficient de x és una fracció, a més de canviar el signe cal invertir les xifres.

y= 2x + 2 és perpendicular a y= –x/2 + 2
y= 3x/2 és perpendicular a y= -2x/3



PUNT DE TALL I SOLUCIONS DEL SISTEMA

Un sistema d'equacions de primer grau està compost per dues equacions. Cadascuna d'aquestes equacions és, en realitat, una recta. Cal observar que les coordenades **x** i **y** del punt en què es creuen dues rectes són precisament les dues solucions del sistema d'equacions. Per exemple:

Si a la temperatura d'avui li reste la d'ahir em dóna -1, però si al doble de la temperatura d'avui li sume la d'ahir el resultat és 4.

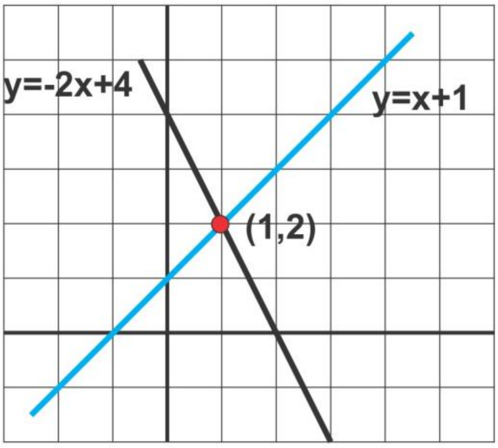
Les dues equacions del sistema seran:

x-y= -1
2x+y= 4

Que escrites en forma de funció són:

y=x+1
y=-2x+4

I les solucions al sistema són **x=1** i **y=2**, que són les coordenades del punt de tall de les dues rectes.



FUNCIONS DE SEGON GRAU

A les funcions de segon grau la x està elevada al quadrat. Pot aparèixer també una x sense elevar i un terme independent, sense x. Per exemple:

$$y= x^2 + 3x + 2$$

La seua forma és de **paràbola**.

Indica que els valors de **y** (dependents dels de **x**) varien exponencialment. Què vol dir?

A la successió 2, 4, 6, 8, 10... representada per y= 2x cada valor està separat de l'anterior i del posterior per la mateixa quantitat, en este cas 2.

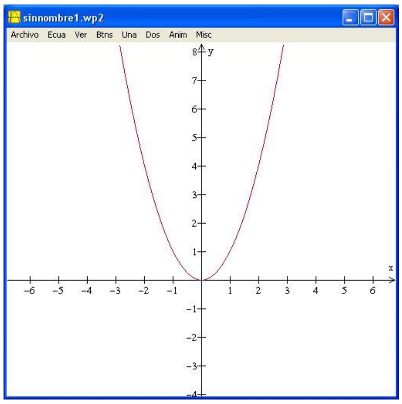
A la successió 2, 4, 8, 16... representada per la funció y= x^2 els valors van separant-se més i més.

La primera representaria, per exemple, "el doble de". La segona representaria, per exemple, una àrea.

REPRESENTACIÓ I POSICIÓ EN LA GRÀFICA. EXEMPLES

Una funció que associa a cada número el seu quadrat.

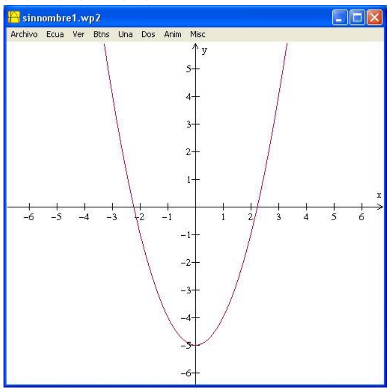
x	f(x) = x^2
-4	16
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	3
4	16
….	….



Si sols du x^2 i **no té terme independent** passa per l'origen de coordenades.

Una funció que associa a cada número el seu quadrat menys cinc unitats

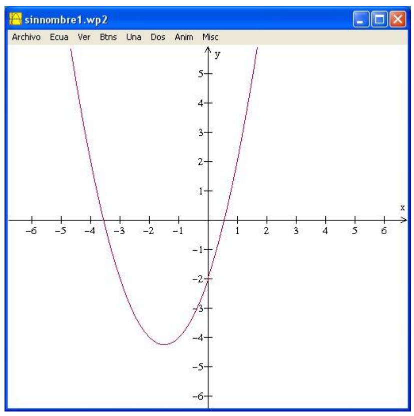
x	f(x) = x^2-5
-4	11
-3	4
-2	-1
-1	-4
0	-5
1	-4
2	-1
3	4
4	11
….	….



Du terme independent, que ens indica per on talla l'eix de les **y**. En aquest cas, -5.

Una funció que associa a cada número el seu quadrat, més el número menys dues unitats.

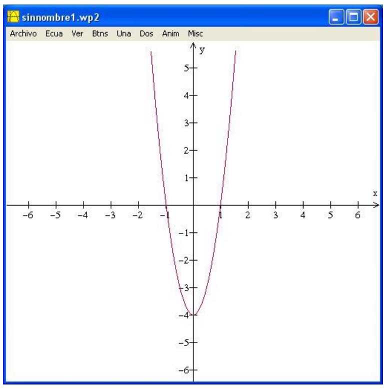
x	f(x) = x^2+x-2
-4	10
-3	4
-2	0
-1	-2
0	-2
1	0
2	4
3	10
4	18
….	….



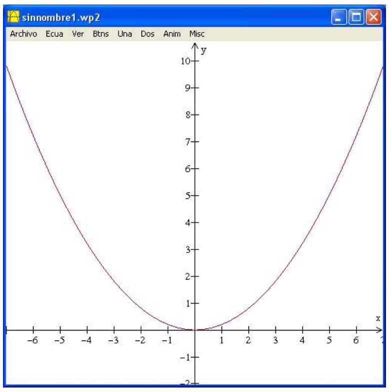
Al dur terme x es descentra. El terme independent continua indicant per on talla l'eix de les y.

OBERTURA I DIRECCIÓ DE LA PARÀBOLA

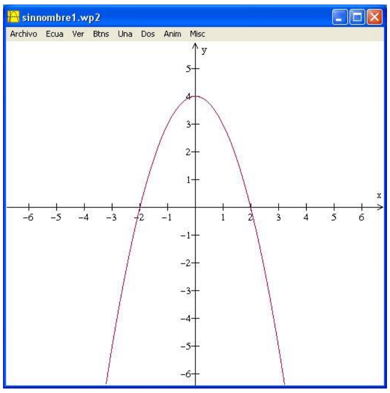
Si el **coeficient** de la x^2 **és major** que 1 (per exemple $2x^2$) la paràbola **es tanca**.



Si el **coeficient** de la x^2 **és menor** que 1 i major que 0 (per exemple ½) la paràbola **s'obre**.

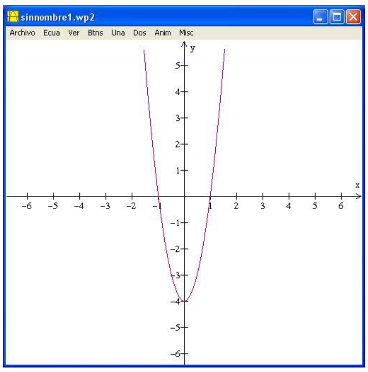


Si el coeficient de la x^2 és negativa la paràbola està invertida, mantenint els atributs del terme independent i del coeficient de la x. És a dir, es tancarà a valors menors que -1 (-3, -6...) i s'obrirà a valors entre -1 i 0.

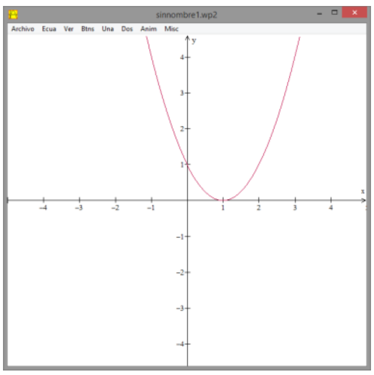


TALL DE LA FUNCIÓ DE SEGON GRAU AMB L'EIX X

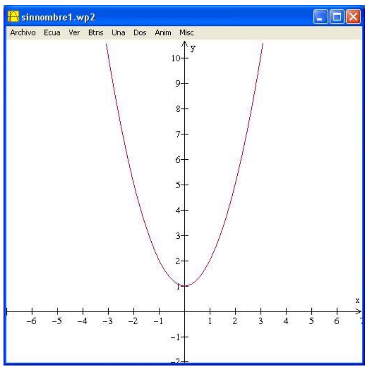
Els punts de tall de la funció amb l'eix de les x es denominen **arrels**. Poden ser 2, 1 o cap.



Dues arrels



Una arrel



Cap arrel

Les solucions es calculen amb la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Els resultats corresponen als valors de tall de la funció amb l'eix horitzontal. Com a l'eix horitzontal la y val 0, és per això que per a resoldre-les cal que estiguen igualades a 0, com per exemple

$$x^2 - x - 2 = 0$$

Recorda que **x** és la variable independent (independent perquè tu li dones els valors que vols) i **y** és la variable dependent (perquè depèn del valor de la x). Entre les dues formen el parell de coordenades que situen un punt. La seua correspondència amb els binomis és:

Si apliquem la fórmula anterior a la funció $x^2 - x - 2$ ens ixen com a resultats els valors $x = 2$ i $x = -1$

Recorda que, a la fórmula, els valors **a**, **b** i **c** són els que acompanyen a la x^2, la x i el terme independent.

Així, a l'equació $x^2 - x - 2 = 0$ a = 1, b = -1 i c = -2
I a l'equació $2x^2 - 3x - 1 = 0$ a = 2, b = -3 i c = -1

SOLS COM A CURIOSITAT

Els binomis en que es factoritza la funció $y = x^2 - x - 2$ seran $(x -2) \cdot (x +1)$. És a dir, si multipliquem $(x -2) \cdot (x +1)$. ens donarà $x^2 - x - 2$. Com veus són dos binomis on a les solucions se'ls ha canviat el signe. Realment no és així. La raó és la següent:

Per a poder traure la solució he d'igualar la funció a 0. Per tant, o és 0 el primer binomi o ho és el segon, donat que estan multiplicant-se entre sí i el resultat ha de ser 0. Per a que el primer binomi siga 0 **x** ha de valdre 2, i per a que ho siga el segon binomi, **x** ha de ser -1, que són els valors de les solucions obtingudes amb la fórmula. I són 0 perquè són els valors de x on la funció (y) és 0.

Si el valor que hi ha dins de l'arrel ($b^2 - 4ac$) és **positiu i distint de b^2** eixiran dos valors (la funció talla l'eix horitzontal en dos punts, com al primer dibuix), que seran les arrels. Si és **positiu i igual que b^2** eixirà una sola arrel (la funció sols toca l'eix horitzontal en un punt, com al segon dibuix). Si el valor és **negatiu**, no hi ha solució, la qual cosa vol dir que la funció no talla l'eix horitzontal, com al tercer dibuix.