BLOC 1.- LES CLASSES DE NÚMEROS

1. **Números naturals**: són els que utilitzem per a comptar per unitats (1, 2, 3, 4, 36...)
2. **Números enters**: són els números per unitats, però tant negatius com positius i el zero (0, 1, 2, -1, -4, 36...)
3. **Números racionals**:
   - Són tots els anteriors i els que es poden expressar com a fracció (a/b) on a y b son enters i b no és igual a zero (fraccionaris) (1/6, 23/24, ¾, ...)
   - Quan expressem un número racional no enter en forma decimal s'obté un número decimal exacte (10/4 = 2,5) o bé un número decimal periòdic (p.ex: 1.3333...), pur o mixt.
4. **Números irracionals**:
   - No es poden expressar com a fracció de números enters o com a decimals periòdics.
   - Són aquells que s'escriuen mitjançant una expressió decimal amb infinites xifres i no periòdiques (p.ex: $\sqrt{2}$ = 1.41421356237309504880168...).

e = $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $\qquad$ π $\qquad$ Φ (auri) = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

5. **Números reals**: números racionals i irracionals

$$\mathbb{R}\ \text{Reals}\begin{cases}\mathbb{Q}\ \text{Racionals}\begin{cases}\mathbb{Z}\ \text{Enters}\begin{cases}\mathbb{N}\ \text{Naturals}\\ \text{Enters negatius}\end{cases}\\ \text{Fraccionaris}\end{cases}\\ \text{Irracionals}\end{cases}$$

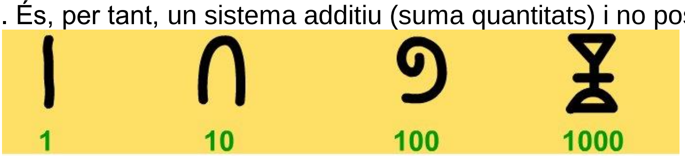
ELS NÚMEROS NATURALS

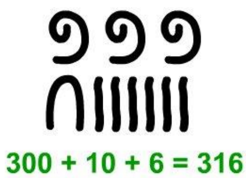
Són els que ens ajuden a comptar els elements d'un conjunt, o les coses **per unitats**, sense decimals. Apareixen amb el comerç. **0, 1, 2, 3, ...**

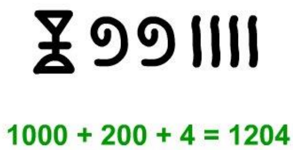
SISTEMES DE NUMERACIÓ (sols com a curiositat)

EGIPCI

- Els egipcis utilitzaven símbols per a diferents quantitats.
- La repetició de símbols forma un conjunt que ens dóna el resultat final.
- No importa l'ordre. És, per tant, un sistema additiu (suma quantitats) i no posicional.

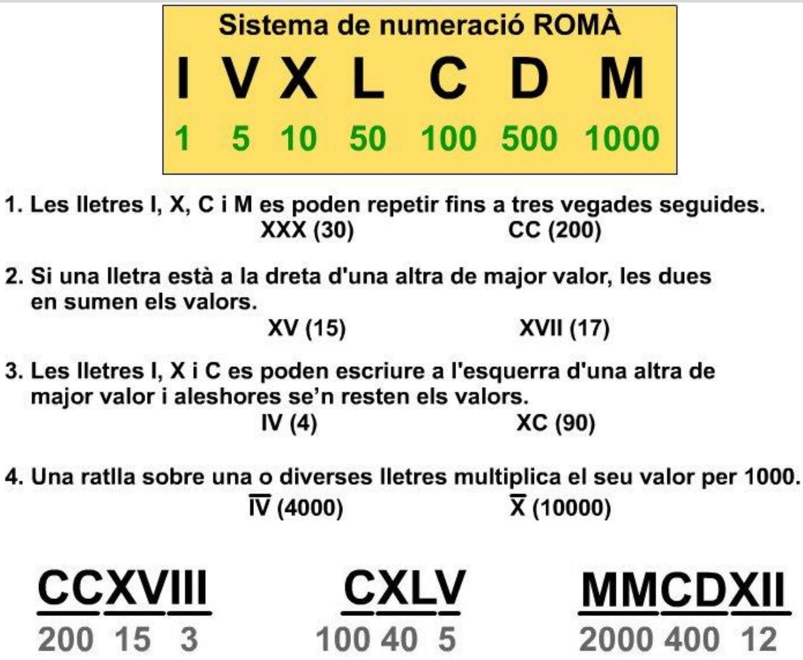






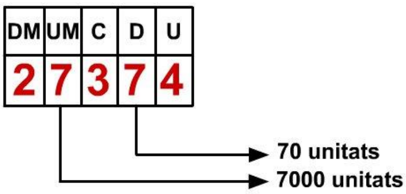
Sistema de numeració ADDITIU

ROMÀ



És, per tant, un sistema additiu (suma quantitats) i posicional (importa el lloc de cada símbol).

DECIMAL



Consta de 10 símbols. Cadascun té un valor, que varia segons la seua posició. És, per tant, posicional, però no additiu, donat que les xifres no sumen els seus valors.

ELS NÚMEROS ENTERS

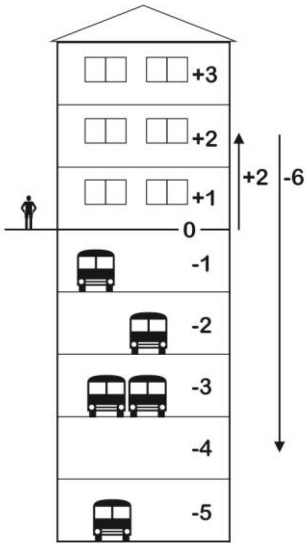
Inclouen els naturals, el 0 i els negatius, sense decimals. Per a restar emprem els nombres enters.

Si **200** és un número natural, **-200** no és una resta, és un número completament diferent a 200. No és el mateix estar a 20º que a -20º. I no hem fet cap resta.

És a dir, realment una **resta és una suma que conté números negatius**. El resultat final durà el signe de la quantitat major (negatius o positius). La forma més fàcil és fer la resta i posar el signe del major.

- Si al banc tinc 100 € (positiu) i entra una factura de 200 € (negatius), em queden -100 € (negatius)

100 + (-200) = 100 – 200 = –100



+2 -6 = -4

Altre exemple:

Si estàs al carrer (0) i puges 2 pisos estaràs al +2, però si en baixes 6 estaràs al -4.

És el mateix resultat de restar 6 i 2 i posar el signe del major (-6).

2 - 6 = - 4

Pots fer aquesta conversió (o imaginar-te-la) sempre que no ho tingues clar.

Jerarquia de les operacions

S'entén per jerarquia de les operacions la "força" i l'ordre que tenen les diverses operacions amb números a l'hora de realitzar les mateixes; amb altres paraules: **quina és la primera operació que cal efectuar.**

- Si sols hi ha sumes i restes es realitzen o bé pas per pas (normalment d'esquerra a dreta) o agrupant positius i negatius i restant els resultats. **Recorda que si la quantitat més gran és negativa el resultat final serà negatiu**.
- Si sols tenim multiplicacions i/o divisions les fem normalment.
- Quan combinem sumes, restes, productes, divisions i potències:
  - **Primer:** realitzar les multiplicacions i divisions
  - **Segon:** realitzar a continuació les sumes i restes
  - Si apareixen **potències** es realitzen primer de tot.
- Si apareixen parèntesis es resol primer l'interior.
- Si apareixen parèntesis que inclouen a altres parèntesis es resolen de dins cap a fora.

Exemple 1:	$2 + \mathbf{3 \cdot 4} = 2 + \mathbf{12} = 14$	Primer, el producte; després, la suma
Exemple 2:	$\mathbf{4/2} - \mathbf{9/3} + 5 = \mathbf{2} - \mathbf{3} + 5 = 4$	Primer, la divisió; després, la suma i/o resta
Exemple 3:	$4 \cdot \mathbf{2^2} - 20 = 4 \cdot \mathbf{4} - 20 = \mathbf{16} - 20 = \mathbf{-}\ 4$	Primer la potència, després la multiplicació i al final la resta
Exemple 4:	$4 \cdot \mathbf{2^2} - \mathbf{16 : 4} = 4 \cdot \mathbf{4} - 4 = \mathbf{16} - 4 = 12$	Primer la potència. També pots fer la divisió. Després la multiplicació. Al final la resta.
Exemple 5:	$(\mathbf{2 + 3}) \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$	Primer el parèntesi. Després la multiplicació.
Exemple 6:	$(8 - (4\text{-}2)) : 2 = (8 - \mathbf{2}) : 2 = \mathbf{6} : 2 = 3$	Primer el parèntesi interior, després l'exterior. Finalment la divisió.

<u>**Compte** amb les sumes o restes dins d'una fracció. Si es pot es fan primer.</u>

$$\frac{6+4}{2}+7=\frac{10}{2}+7=5+7=12$$

Com es veu, hem fet primer la suma per poder fer la divisió. Ho fem perquè dóna exacte. En altre cas caldria fer-ho amb el mínim comú múltiple (ho veurem més avant).

Compte amb el signe **igual**.

Encara que semble una estupidesa, el signe igual (=) significa això, igual. És a dir, les dues parts a esquerra i dreta del signe han de ser iguals. **Sempre**.

Si per exemple em diuen: per a saber quants dits tens, suma els dits de les dues mans i després multiplica'ls per 2 (per a comptar també els dels peus).

Si ho faig així ho estic fent malament.

$$5 + 5 = 10 \cdot 2 = 20$$

Fixa't. El primer grup és la suma de 5+5, que són 10. Si aquest grup és igual al segon, i aquest al tercer, resulta que 5+5 serien 20.

Com es fa correctament?

$$5 + 5 = 10$$

$$10 \cdot 2 = 20$$

Primer faig 5+5 i l'iguale al seu resultat, 10. Ara, en altra expressió, faig la següent operació, multiplicar per 2.
Així les igualtats es compleixen.

Els signes

Els números reals poden ser positius i negatius. Recorda que un número negatiu té identitat pròpia. El - 8 no és el 8 amb una ratlleta davant. És un número completament distint. No és el mateix estar a 8 graus que a – 8 graus, no?

A la suma i la resta:

Si tenim números d'igual signe:
Quan tinguem dos o més números d'igual signe, el que farem és sumar les quantitats i al resultat anteposar-li el mateix signe. Si són positius: **2 + 3 = 5** Si són negatius: **- 2 - 3= - 5 Si estàs a 2 baix zero i baixa 3 graus la temperatura, ara estàs a 5 baix zero, no?**

Si tenim números de signes diferents:
Si tenim números de diferents signes, restem el número major menys el número menor i el resultat durà el signe del número major. **5 - 7= - 2** **7 - 5 = 2**

Canvi de signe: Un signe – davant d'un parèntesi canvia tots els signes de l'interior: **– (6 – x)= –6+x**
Si es pot, és millor resoldre el parèntesi i després canviar el signe si cal:
– (6 – 2)= – (4) = – 4 **– (– 6 – 2)= – (– 8) = 8**

A la multiplicació i la divisió (la regla dels signes):

	+	-
+	+	-
-	-	+

(- 3) · 4 = - 12 **3 · (- 4) = - 12** **(- 3) · (- 4) = 12**

(- 8) : 2 = - 4 **8 : - (2) = - 4** **(- 8) : -(2) = 4**

És a dir:
més per més = més **+ · + = +**
més per menys = menys **+ · – = –**
menys per més = menys **– · + = –**
menys per menys = més **– · – = –**

Com veus, **quan els signes són iguals el resultat és positiu. Quan són diferents, negatiu.**

Aquesta regla sols s'utilitza a la multiplicació, la divisió i els parèntesis, no a la suma o a la resta.

Altra cosa és quan trobem més membres. Cal fer-ho pas per pas:
4 · (-2) · 2 = -16
(-4) · (-2) · 2 = 16
(-4) · (-2) · (-2) = -16

Potenciació

Quan elevem un número a una potència hem de fer el mateix, sols que en aquest cas el resultat és més fàcil de predir.

$(+)^{impar} = (+)$	Qualsevol número positiu elevat a exponent imparell (o senar) té resultat positiu
$(+)^{par} = (+)$	Qualsevol número positiu elevat a exponent par té resultat positiu
$(–)^{impar} = (–)$	Qualsevol número negatiu elevat a exponent imparell té resultat negatiu
$(–)^{par} = (+)$	Qualsevol número negatiu elevat a exponent par té resultat positiu

Propietats de les operacions

Commutativa

Una operació, li direm ∗, es diu que compleix la propietat commutativa si donats dos elements qualsevol s'acompleix que a∗b = b∗a.

La suma i la multiplicació de números reals són commutatives:
2+3 = 5   3+2 = 5
2 · 3 = 6   3 · 2 = 6

mentre la resta i la divisió no ho són:
2-3 = -1   3-2 = 1
4:2 = 2   2:4 = 0,5

Associativa

Una operació, ∗, es diu que compleix la propietat associativa si donats tres elements qualsevol s'acompleix que a*(b∗c) = (a∗b)∗c, escrivint-se directament en la forma: a∗b∗c

La suma de números reals verifica la propietat associativa:
3 + (2 + 4) = 3 + 6 = 9
(3 + 2) + 4 = 5 + 4 = 9

La multiplicació de números reals verifica la propietat associativa:
3 · (2 · 4) = 3 · 8 = 24
(3 · 2) · 4 = 6 · 4 = 24

Però, la resta i la divisió de números reals no la verifica:
3 - (2 - 4) = 3 – (-2) = 5
(3 - 2) - 4 = 1 - 4 = -5

8 : (4 : 2)= 8 : 2 = 4
(8 : 4) : 2 = 2 : 2 : 1

Distributiva

Siguen dues operacions, ∗ y ^; es diu que l'operació ∗ és distributiva respecte de l'operació ^ si es verifica: a∗ (b^c)=a∗b^a∗c.

Els números reals, verifiquen la propietat distributiva del producte respecte de la suma:
a·(b+c)=a·b+a·c. Per exemple:
2·(3+4) = 2·7=14
2.3+2·4 = 6+8 = 14

ELS NÚMEROS PRIMERS

Són aquells que sols són divisibles per si mateix i per 1.

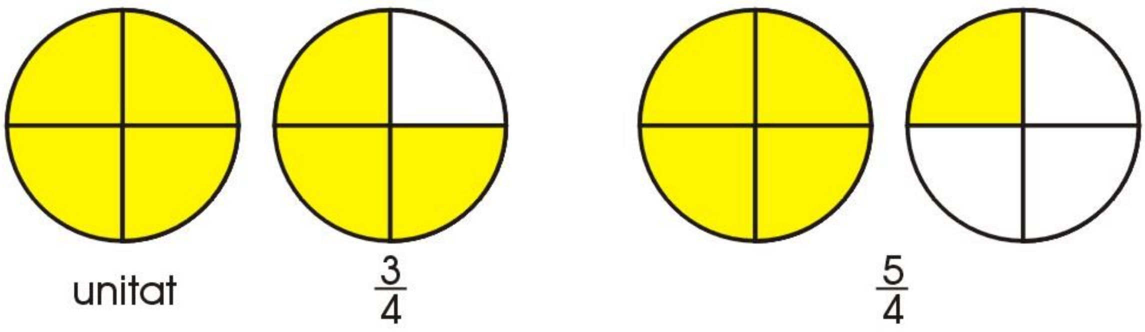
1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Podem fer la taula, o garbell d'Eratòstenes, ratllant primer els múltiples de dos, després els de tres, els de 5, els de 7, i passarem a l'11. Com el quadrat d'11 és superior a 100, tots els números no ratllats (i amb requadre gruixut) són números primers.

Els números primers són necessaris per a descompondre per factors qualsevol altre número. Veuràs la seua utilitat al capítol de fraccions.

ELS NÚMEROS RACIONALS

Són necessaris per a parlar de "parts" d'una unitat. El seu nom ve de "ració".



A la primera imatge veiem la unitat dividida en quatre parts (podria estar-ho en dues, tres, cinc...). Si n'agafem tres, la "ració" és de 3/4. També podem agafar més d'una unitat, com a les dues següents imatges, on agafem una unitat completa i una quarta part de la segona, és a dir, 5/4.

Es poden representar com una fracció (divisió) o com el resultat de la mateixa:

$$\frac{1}{2}=0{,}5 \qquad \frac{762}{11}=69{,}2727 \qquad \frac{116}{90}=1{,}28888$$

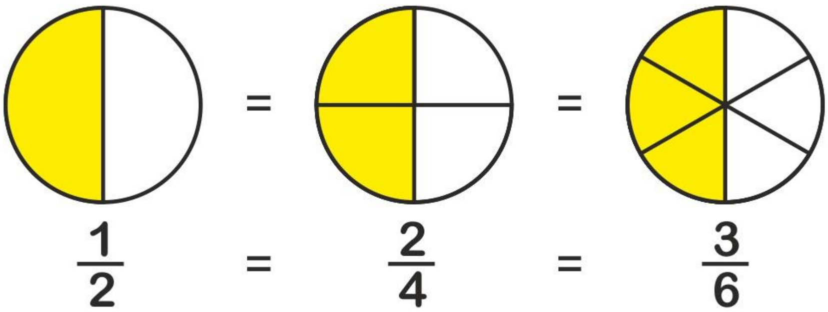
0,25 0,223	0,3333...	0,223333...
Decimal exacte **Té un nombre finit de decimals.**	**Decimal periòdic pur** **Té infinits decimals que es repeteixen, sols o en grups**	**Decimal periòdic mixt** **Té infinits decimals, però el primer o primers no són iguals**

Equivalència de fraccions (és molt important el concepte de fracció equivalent)

Dues fraccions $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ són equivalents si $a \bullet d = b \bullet c$

Exemple: $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ $\qquad a \bullet d = b \bullet c \qquad 6 \bullet 2 = 4 \bullet 3 = 12$

Pots veure que la primera fracció és el resultat de multiplicar la segona, dalt i baix, per 2.



Hi ha infinites fraccions equivalents. Com veus al dibuix, és el mateix parlar de la meitat que dels dos quarts, que dels tres sisens.

Per tant, si a una fracció la multipliques dalt i baix pel mateix número la converteixes en una fracció equivalent.

De la mateixa manera, si una fracció es pot dividir, dalt i baix, pel mateix número, es converteix també en una fracció equivalent.

$$\frac{6}{4}=\frac{6/2}{4/2}=\frac{3}{2}$$

Fraccions irreductibles. Simplificació

Quan una fracció té altres fraccions equivalents per baix (de menys valor), és perquè es pot **reduir**.

Cal buscar l'expressió irreductible de les fraccions dividint numerador i denominador per un divisor comú fins que no es puga més.

$\frac{15}{20}=\frac{5 \bullet 3}{5 \bullet 4}=\frac{3}{4}$ Hem dividit dalt i baix per 5

Com veiem, són també **fraccions equivalents**.

Regles de divisibilitat

Per

2	Si el número és parell
3	Si la suma de les seues xifres és múltiple de 3
5	Si el número acaba en 5 o en 0

Descomposició factorial

Consisteix en descompondre un número convertint-lo en la multiplicació dels seus números primers. Ens aprofitarà per als càlculs amb fraccions (m.c.d. i m.c.m.)

$8 = 2 \bullet 2 \bullet 2$ $\qquad 24 = 2 \bullet 2 \bullet 2 \bullet 3$ $\qquad 30 = 2 \bullet 3 \bullet 5$

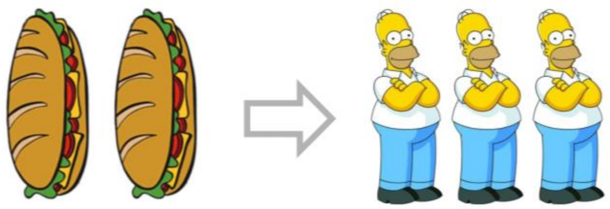
Per fer-ho cal començar comprovant si el número és divisible per 2, si no per 3, si no per 5, etc.
Per qüestions d'ordre començarem pel divisor més baix: si un número es pot dividir per 2 i per 5, comencem amb el 2.

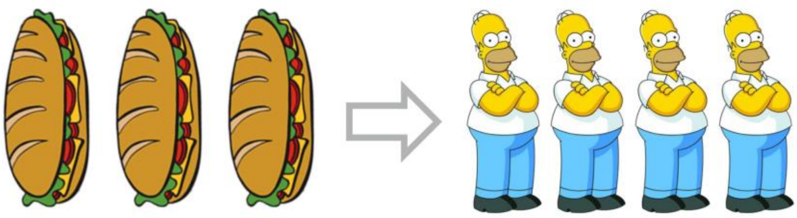
$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

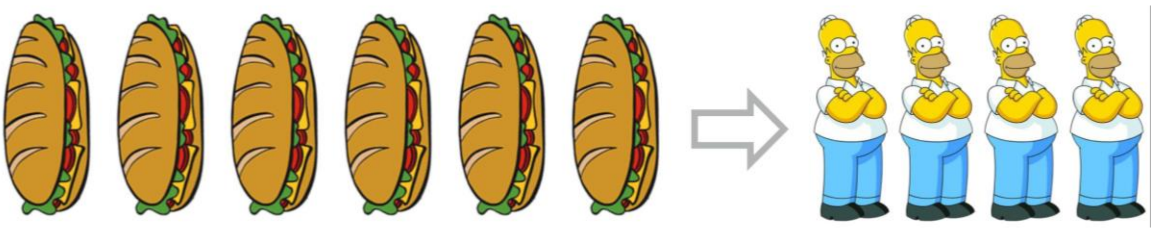
$\mathbf{8 = 2^3}$ $\qquad \mathbf{24 = 2^3 \cdot 3}$ $\qquad \mathbf{30 = 2 \cdot 3 \cdot 5}$

El resultat es dóna en forma exponencial (sempre que es puga).

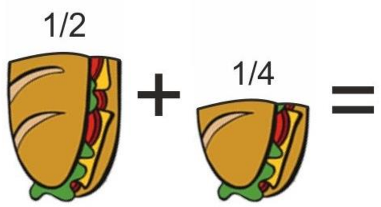
Com repartiries els bocates entre les persones, fent el menor número de trossos possible?



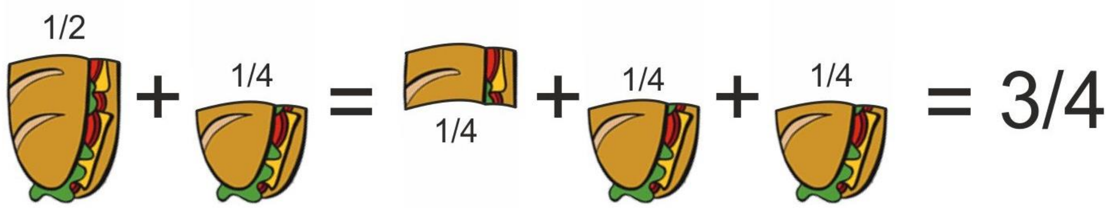




De la mateixa manera, si vull sumar “fraccions” de bocata...



...hauré de partir el “mig bocata” en dos quarts per a poder-lo sumar a l’altre quart.



I la suma em donarà “tres quarts de bocata”.

MÍNIM COMÚ MÚLTIPLE

Com indica el seu nom, el mínim comú múltiple d’un grup de números és el número més baix que és múltiple de tots ells.

2	3	4
4	6	8
6	9	**12**
8	**12**	16
10	15	20
12	18	24
14	21	28

Com es pot veure a la taula, el **primer múltiple** de 2, 3 i 4 que és **comú** als 3 és el **12.**

El **mcm** s’utilitza per a sumar i restar fraccions que tenen denominadors diferents. Per calcular-lo es descompondran els números en els seus factors primers i es prendran **els factors comuns i no comuns amb el seu major exponent**.

$$\frac{15}{20} \qquad \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{20} \qquad \frac{5}{6}$$

Si factoritzem:

- 20 es pot dividir per 2, 2 i per 5
- 4 es pot dividir per 2 i 2

El mínim comú múltiple de 20 i de 4 és 20

2^2 x 5=20

- 20 es pot dividir per 2, 2 i per 5
- 6 es pot dividir per 2 i per 3

El mínim comú múltiple de 20 i de 6 és 60

2^2 x 3 x 5=60

m.c.m = $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$

$18 = 2 \cdot 3^2$ $\qquad$ $24 = 2^3 \cdot 3$ $\qquad$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

m.c.m = $3^2 \cdot 2^3 = 72$

MÀXIM COMÚ DIVISOR

Com indica el seu nom, el màxim comú divisor d'un grup de números **és el número més alt que els divideix a tots ells**. S'utilitza per a reduir fraccions. Busquem el número més gran que puga dividir al numerador i al denominador. Així, el resultat serà el més baix possible.

$$\mathbf{\frac{15}{20}} \qquad\qquad \mathbf{\frac{30}{20}}$$

Si factoritzem:

- 15 es pot dividir per 3 i per 5
- 20 es pot dividir per 2, 2 i per 5

El màxim comú divisor dels dos és 5
Per tant, si dividim el 15 i el 20 per 5 queda:

$$\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$$

- 30 es pot dividir per 2, per 3 i per 5
- 20 es pot dividir per 2, 2 i per 5

El màxim comú divisor dels dos és 10 (2·5)
Per tant, si dividim el 30 i el 20 per 10 queda:

$$\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$$

Per calcular-lo es descompondran els números en els seus factors primers i es prendran **els factors comuns amb el seu menor exponent**. Després es dividiran els dos números pel número obtingut i quedarà una fracció irreductible.

m.c.d = 2 · 3 = 6

36 = $2^2 \cdot 3^2$ **24** = $2^3 \cdot 3$ **30** = $2 \cdot 3 \cdot 5$

m.c.d = 2^2 · 3 = 12

Per tant, si el **mcd** de 36 i de 24 és 12:

$$\frac{36}{24}=\frac{36/12}{24/12}=\frac{3}{2}$$

I si el de 24 i el de 30 és 6:

$$\frac{24}{30}=\frac{24/6}{30/6}=\frac{4}{5}$$

Que són fraccions irreductibles.

SUMA I RESTA DE FRACCIONS

Dues o més fraccions no es poden sumar o restar **si no tenen el mateix denominador.**

$$\mathbf{\frac{3}{20}+\frac{5}{20}=\frac{8}{20}} \qquad\qquad \mathbf{\frac{3}{20}+\frac{6}{5}}=?$$

En el primer cas hem pogut sumar els numeradors perquè els denominadors eren iguals.

Però en el segon cas, com els denominadors són diferents, cal treure el denominador comú de les fraccions mitjançant el mètode del **mcm** És el que es diu "reduir a comú denominador". No és res més que buscar una **fracció equivalent** a la segona que tinga com a denominador 20, per a ser igual que la primera.
Evidentment, si multipliquem 5 · 4 obtindrem 20, però tindrem que multiplicar també el 6 del numerador, si no la fracció no serà equivalent.

$$\mathbf{\frac{3}{20}+\frac{6\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{3}{20}+\frac{24}{20}}$$

I ja les podem sumar

$$\mathbf{\frac{3}{20}+\frac{6\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{3}{20}+\frac{24}{20}=\frac{27}{20}}$$

En altres casos no és tan directe. Cal buscar un número múltiple dels dos denominadors que siga comú.

$$\frac{3}{20}+\frac{5}{6}=$$

Quin és el primer múltiple comú a 20 i a 6? Per a no fer una taula com la d'abans, la qual podria ser immensa, cal descompondre els dos en els seus factors primers.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$20 = 2^2 \cdot 5 \qquad\qquad 6 = 2 \cdot 3$$

I buscar el seu mcm

El mcm s'obté multiplicant els factors comuns i no comuns dels dos números, escollint els de major exponent.

En este cas és $2^2 \times 3 \times 5 = 60$

Una vegada el tenim, cal recordar que si hem canviat el denominador d'una fracció multiplicant-lo per un número, cal canviar també el numerador multiplicant-lo pel mateix número, creant així una **fracció equivalent**.

$$\frac{3 \bullet 3}{20 \bullet 3}+\frac{5 \bullet 10}{6 \bullet 10}=\frac{9}{60}+\frac{50}{60}=\frac{59}{60}$$

Com veureu, si hem de canviar el 20 per 60 (donat que 60 és el **mcm** de 20 i de 6) hem de multiplicar-lo per 3. Fem el mateix amb la part de dalt i multipliquem el 3 per 3. El mateix passa amb el 6: cal multiplicar-lo per 10 per a convertir-lo en 60. Multipliquem també el 5 per 10.
L'únic que estem fent és crear **fraccions equivalents**.

Com ara les fraccions ja tenen el denominador igual ja es poden sumar (o restar) els numeradors.

MULTIPLICACIÓ DE FRACCIONS

Per a multiplicar fraccions sols tenim que multiplicar en línia:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{10}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$$

Cal reduir sempre el resultat.

Cal observar que, si podem fàcilment reduir prèviament, els càlculs són més fàcils:

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{10}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

Que és el mateix que...

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{10}=\frac{35}{20}=\frac{3}{4}$$

Però en aquest cas és més difícil de simplificar

En cas de tindre un conjunt de sumes i multiplicacions, primer la multiplicació.

DIVISIÓ DE FRACCIONS

Per a dividir fraccions sols tenim que multiplicar en creu:

$$\frac{3}{4}:\frac{5}{10}=\frac{3}{4}\times\frac{5}{10}=\frac{3\cdot 10}{4\cdot 5}=\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$$

Com es veu, la posició la mana la primera fracció.

Igualment, si podem fàcilment reduir prèviament, els càlculs són més fàcils:

$$\frac{3}{4}:\frac{5}{10}=\frac{3}{4}:\frac{1}{2}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

En cas de tindre un conjunt de sumes i multiplicacions o divisions, primer la multiplicació o la divisió.

$$\frac{5}{2}+\frac{3}{4}:\frac{5}{10}=\frac{5}{2}+\frac{3\cdot 10}{4\cdot 5}=\frac{5}{2}+\frac{30}{20}=\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=\frac{8}{2}=4$$

POTÈNCIES I ARRELS

POTÈNCIES AMB EXPONENT NATURAL

Una potència és un número enter (base) elevat a un altre (exponent). És el mateix que multiplicar la base per sí mateixa tantes vegades com diu l'exponent.

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

Si la base és negativa el resultat final durà :

- Signe positiu si l'exponent és parell: $(-2)^4 = 16$
- Signe negatiu si l'exponent és senar: $(-2)^5 = -32$

La potenciació de productes i quocients es fa elevant cada terme a l'exponent i fent la multiplicació o divisió. **No es pot fer amb sumes i restes**.

$(2 \cdot 10)^2 = 2^2 \cdot 10^2 = 4 \cdot 100 = 400$ $\qquad$ $(-10 / 2)^2 = (-10)^2 : 2^2 = 100 / 4 = 25$

És evident què, en aquest cas, també podríem haver resolt primer el parèntesi i després elevar:

$(2 \cdot 10)^2 = 20^2 = 400$ $\qquad$ $(-10 : 2)^2 = (-5)^2 = 25$

Veieu que el signe té importància:

MOLT IMPORTANT

No és el mateix $(-2)^2$ que -2^2

En el primer cas el parèntesi ens indica que el número sobre el qual estem operant és el -2, mentre que en el segon el quadrat sols afecta al 2, no al signe. Per tant:

$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$ mentre que $-2^2 = -2 \cdot 2 = -4$

MULTIPLICACIÓ, DIVISIÓ I POTENCIACIÓ AMB BASES IGUALS

Si les bases són iguals es pot treballar d'una manera més directa:

- Per a multiplicar, sumem els exponents:

  $2^5 \cdot 2^2 = 2^7$ (5+2=7)

  $(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$

  $2^5 \cdot 2^{-2} = 2^3$ (5-2=3)

- Per a dividir, restem els exponents:

  $2^5 : 2^2 = 2^3$ (5-2=3)

  $$\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2} = 2\cdot 2\cdot 2 = 2^3$$

  $2^5 : 2^{-2} = 2^7$ (5-(-2)=7

- Per a elevar, es multipliquen els exponents:

  $(2^5)^2 = 2^{10}$

  $(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) =$
  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

  $(2^5)^{-2} = 2^{-10}$

Si un exponent és negatiu pot passar com a positiu al denominador:

$$2^{-10} = \frac{1}{2^{10}}$$

Per tant

$2^5 \cdot 2^{-2} = 2^3$ (5-2=3)

Perquè és el mateix que $2^5 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{2^5}{2^2} = 2^3$

De la mateixa manera, si un exponent negatiu està al denominador, pot passar al numerador com a positiu:

$$1 / 2^{-10} = 2^{10}$$

Per tant

$2^5 : 2^{-2} = 2^7$ (5-(-2)=7

Perquè és el mateix que $2^5 \cdot \frac{1}{2^{-2}} = 2^5 \cdot 2^2 = 2^7$

Ens poden convenir estos passos a l'hora de resoldre fraccions. Així, les següents expressions son equivalents:

$$\frac{2^{10}}{2^{-7}} = 2^{10} \cdot 2^7 = 2^{17}$$

O fer-ho a la manera tradicional

$$\frac{2^{10}}{2^{-7}} = 2^{10-(-7)} = 2^{10+7} = 2^{17}$$

POTÈNCIES DE 10. LA NOTACIÓ CIENTÍFICA.

La necessitat d'utilitzar números amb moltes xifres o amb molts decimals ens du a utilitzar la notació científica, és a dir, un producte d'un número **amb una sola xifra entera** , que pot ser seguida o no per una coma i decimals, i una potència de 10.

Per exemple, 1 milió (1.000.000) s'escriu $\mathbf{10^6}$, amb l'exponent del 10 indicant la quantitat llocs que corre la coma. (un milió és igual que multiplicar 10 per sí mateix 6 vegades)
Si és 3.000.000 s'escriurà $\mathbf{3 \cdot 10^6}$. (perquè és com multiplicar 3 per un milió)

Si treballem amb decimals, el 0,000001 s'escriu $\mathbf{10^{-6}}$. És com dividir 1 entre un milió. Ara l'exponent indica el lloc que ocupa el número a la dreta de la coma o la quantitat llocs que corre la coma.
En el cas de 0,000003 serà $\mathbf{3 \cdot 10^{-6}}$.

Cal utilitzar una sola xifra entera. Així:
3.250.000 = $\mathbf{3{,}25 \cdot 10^6}$
0,00000325 = $\mathbf{3{,}25 \cdot 10^{-6}}$

Notem que l'exponent negatiu equival al positiu posat al denominador d'una fracció:
0,000001 = $\mathbf{10^{-6}}$ = $\mathbf{1 / 10^6}$
Però sols del 10 amb exponent:
0,000005 = $\mathbf{5 \cdot 10^{-6}}$ = $\mathbf{5 / 10^6}$

Si un número té moltes xifres diferents cal arrodonir-les per poder utilitzar la notació científica:
3.254.987= $\mathbf{3{,}25 \cdot 10^6}$
0,00000325456732 = $\mathbf{3{,}25 \cdot 10^{-6}}$

Per fer operacions amb aquest tipus de números s'operen els números per un costat i les potències per l'altre. Quan es tracta de multiplicacions o divisions:

$\mathbf{(4 \cdot 10^5) \cdot (2 \cdot 10^2) = 8 \cdot 10^7}$ $\mathbf{(4 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^2) = 2 \cdot 10^3}$

Si es tracta de sumes o restes és més complicat, i no ho veurem:

$\mathbf{4{,}2 \cdot 10^5 + 2{,}2 \cdot 10^3 = 420 \cdot 10^3 + 2{,}2 \cdot 10^3 = 422{,}2 \cdot 10^3 = 4{,}222 \cdot 10^5}$ o bé

$\mathbf{4{,}2 \cdot 10^5 + 2{,}2 \cdot 10^3 = 420000 + 2200 = 422200 = 4{,}222 \cdot 10^5}$

Amb exponents negatius
$\mathbf{4{,}2 \cdot 10^{-5} + 2{,}2 \cdot 10^{-3} = 0{,}000042 + 0{,}0022 = 0{,}002242 = 2{,}242 \cdot 10^{-3}}$

ARRELS I POTÈNCIES AMB EXPONENT FRACCIONARI

Aquesta part és sols a nivell informatiu

Les arrels són operacions del tipus $\sqrt[n]{a} = b$ on **n** és l'índex i **a** el radicand. El resultat és un número què, elevat a **n**, dóna **a**. Per exemple: $\sqrt[2]{9}$ = 3. És a dir, si eleve 3 al quadrat dóna 9.

Si **n** és senar (impar) sols hi ha una solució o arrel: $\sqrt[3]{8}$ = 2 i $\sqrt[3]{-8}$ = -2

Si n és parell tinc dues solucions: $\sqrt[2]{4}$ = ± 2 , donat que $2^2 = 4$ i $(-2)^2 = 4$

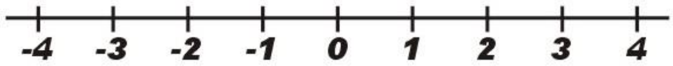
Una arrel d'un número negatiu amb exponent parell no té solució. No hi cap número que, p.ex. elevat al quadrat, done negatiu.

Una potència amb exponent fraccionari s'escriu de la següent forma: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, on l'exponent és fraccionari. El numerador és l'índex de l'arrel i el denominador l'exponent del radicand.

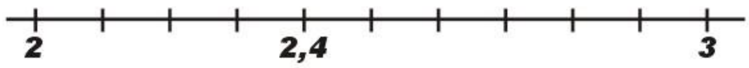
La forma de treballar amb aquest tipus d'exponents és la mateixa que la dels exponents enters, és a dir, sumant, restant o multiplicant els exponents si la base és la mateixa.

REPRESENTACIÓ EN LA RECTA REAL – Sols informatiu

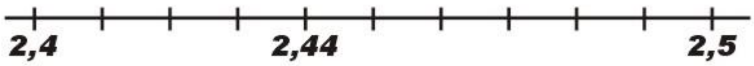
La recta real és l'escenari on podem representar tots els números reals. Al centre tenim el 0, a la dreta els positius i a l'esquerra els negatius.



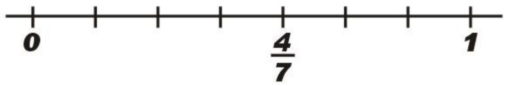
Així, és fàcil representar els naturals i els enters. Per als decimals exactes sols tenim que dividir les vegades necessàries cada fragment o espai.



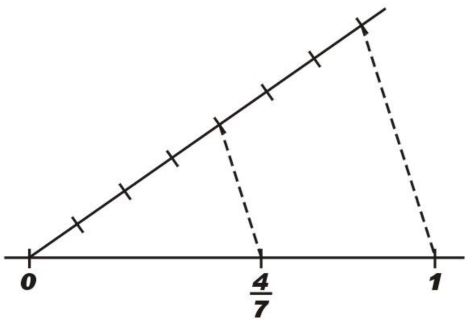
Si necessitem afinar amb més decimals...



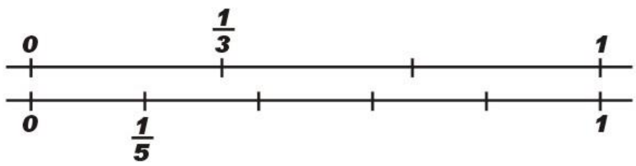
Amb els fraccionaris podem substituir les divisions decimals per fer-nos una idea és clara. Al cas de baix, per a representar els 4/7 dividim la unitat, dividim esta en 7 parts i prenem 4.



També podem utilitzar el teorema de Tales.



La representació ens permet "veure" el valor real dels números



Tot i que, a primer cop, molta gent pensa que 1/3 és menor que 1/5, veiem que no.